Mémo — LIMITES DE FONCTIONS

I - LIMITES DE REFERENCE

(n est un entier naturel non nul)

	x	x^2	x^3	…	x^n	$\sqrt{x}$
$x \to 0$	0	0	0		0	0
$x \to +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$
$x \to -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$		$\begin{cases} +\infty & si\ n\ pair \\ -\infty & si\ n\ impair \end{cases}$	

	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	…	$\frac{1}{x^n}$
$x \to 0^+$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
$x \to 0^-$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$		$\begin{cases} +\infty & si\ n\ pair \\ -\infty & si\ n\ impair \end{cases}$
$x \to \pm\infty$	0	0	0		0

II - OPERATIONS SUR LES LIMITES

Théorèmes :

LIMITE d'une SOMME

Si $\lim f =$	et $\lim g =$	Alors $\lim (f+g) =$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F I

LIMITE du PRODUIT d'une FONCTION par une CONSTANTE

$\lambda \in IR$

Si $\lim f =$	Alors $\lim (\lambda f) =$
ℓ	$\lambda \ell$
$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & si\ \lambda > 0 \\ -\infty & si\ \lambda < 0 \end{cases}$
$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & si\ \lambda > 0 \\ +\infty & si\ \lambda < 0 \end{cases}$

LIMITE d'un PRODUIT

Si $\lim f =$	et $\lim g =$	Alors $\lim (f \times g) =$
ℓ	ℓ'	$\ell\ \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (selon les signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (selon les signes)
0	$\pm\infty$	F I

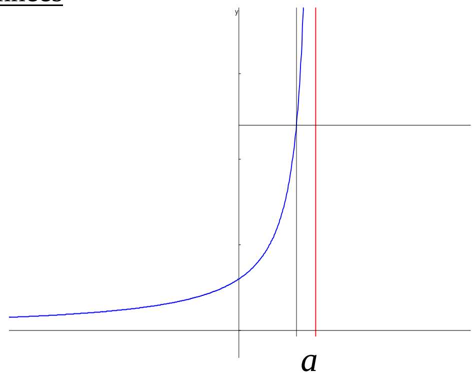
LIMITE d'un QUOTIENT

Si $\lim f =$	et $\lim g =$	Alors $\lim \frac{f}{g} =$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$ (selon les signes)
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$ (selon les signes)
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ (selon les signes)
0	0	F I
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F I

III - ASYMPTOTES

1°) Droites asymptotes

a) Parallèles à l'axe des ordonnées

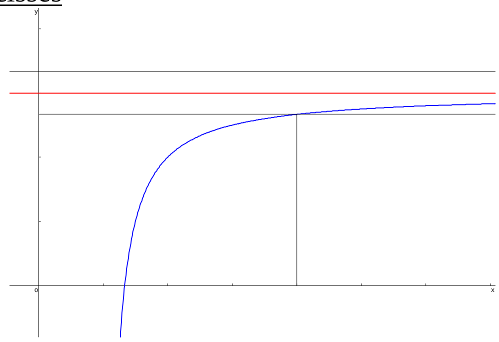


a

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f .
ou $x \to a^+$
ou $x \to a^-$

b) Parallèles à l'axe des abscisses

b



Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe de f .

c) Obliques

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f
ssi on peut écrire $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.

Remarque : Ce qui revient à démontrer que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$.

2°) Courbes asymptotes

La courbe d'une fonction g est asymptote à la courbe de f ssi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = 0$.

IV - LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Soient g et u deux fonctions .
a , b , c sont des réels , et peuvent être remplacés par $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème (admis) :

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ *et* $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g\left[u(x)\right] = c$

V - THEOREMES DES GENDARMES

a *est fini ou infini*

Si au voisinage de a , $u(x) \le f(x) \le v(x)$
et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell$ (ℓ *fini ou infini*) *alors* f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$